第27卷 第6期
2010年12月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 27 No. 6
Dec. 2010

文章编号:1005-3085(2010)06-1030-05

拟线性双重退化抛物方程的自相似解*

詹华税

(集美大学理学院，厦门 361021)

摘 要: 本文研究一类带有非线性梯度项的拟线性双重退化抛物方程的自相似奇性解的存在性及其分类。该类方程包含著名的Hamilton-Jacobi方程，牛顿流和非牛顿流渗流方程。本文通过标准的皮卡迭代方法，得到了该方程的自相似奇性解存在的充分条件，同时给出了相应奇性解的分类。

关键词: 拟线性双重退化抛物方程；自非线性梯度项；自相似解；奇性解

分类号: **AMS**(2000) 35L80; 35L60; 35L15; 35B40; 35F25 **中图分类号**: O175.27 **文献标识码**: A

1 引言

本文研究带有非线性梯度项的拟线性退化双重退化抛物方程

$$u_t = \mathrm{div}\big(|Du^m|^{p-2}Du^m\big) - u^{q_1}|Du^m|^{p_1} \tag{1}$$

的自相似奇性解的存在性及其分类，其中$D=\mathrm{grad}$代表一般的梯度运算。当$q=0$, $m=1$, $p=2$时，式(1)就是Hamilton-Jacobi方程[1]。当$p_1=q_1=0$时，$m=1$和$p=2$分别是著名的p-Laplace方程和多孔介质方程；当$p_1=0$, $q_1\neq 0$时，$m=1$和$p=2$分别是带吸附项的p-Laplace方程和多孔介质方程。这些方程都有深刻的物理背景[2,3]，而且一般情况下都只有弱解，关于这些弱解的存在性和唯一性已经有许多的研究[2,3]。还有许多文章研究了$p=2$, $p_1=0$时的自相似解的存在性[4-8]等。基于上述文献的结果，促使我们去考虑一般情形(1)的自相似解的存在性及其分类。从已有的结果来看，各种同方程(1)相类似的拟线性抛物方程自相似解的存在性都依赖于Picard迭代方法或者是应用不动点定理，其分类的方法也都类似，如何准确描述方程中函数u的指数m, q_1与梯度项的指数p, p_1之间的关系，吸收项中两个非线性因子u^{q_1}, $|Du^m|^{p_1}$对方程的自相似解的影响是解决问题的两个难点。本文与已有的文献相比较，一个非常本质的困难就是积分

$$\int |z'(r)|^{p-1}\mathrm{d}r, \quad \int z'(r)\mathrm{d}r = z + c$$

的区别，这种区别增加了许多估计的困难。

在本文中，我们考虑方程(1)的Cauchy问题，总假定$p>2$, $m>1$，同时假定

$$p>p_1, \quad q_1+p_1m>m(p-1)>1. \tag{2}$$

自相似解$u(x,t)$是具有如下形式的解

$$u(x,t)=t^{-\alpha}f\big(|x|t^{-\beta}\big),$$

收稿日期: 2009-03-23. **作者简介**: 詹华税(1966年7月生)，男，博士，教授. 研究方向：偏微分方程理论与应用、微分几何理论.
***基金项目**: 福建省自然科学基金(2009J01009)；集美大学科学基金.

即我们所考虑的是一维条件下的自相似解。直接计算可以知道

$$\alpha=\frac{p-p_1}{p(q_1+(p_1-p+1)m)-(1+m-mp)(p-p_1)}, \tag{3}$$

$$\beta=\frac{q_1+(p_1-p+1)m}{p(q_1+(p_1-p+1)m)-(1+m-mp)(p-p_1)}, \tag{4}$$

条件 (2) 保证了 $\alpha>0,\ \beta>0$。方程 (1) 则转化为如下的常微分方程

$$\left(|(f^m)'|^{p-2}(f^m)'\right)'+\frac{n-1}{r}|(f^m)'|^{p-2}(f^m)'+\beta rf'+\alpha f-f^{q_1}|(f^m)'|^{p_1}=0, \tag{5}$$

其中 $f=f(r),\ r=|x|t^{-\beta}$，这时候的初始条件为

$$f(0)=a>0,\quad f'(0)=0. \tag{6}$$

奇性解是指在 $\mathbf{R}^n\times(0,+\infty)\setminus(0,0)$ 上连续且满足

$$\lim_{t\to 0}\sup_{|x|>\varepsilon}u(x,t)=0,\quad \forall\,\varepsilon>0 \tag{7}$$

的非平凡非负解。一个奇性解如果还满足

$$\lim_{t\to 0}\int_{|x|\le\varepsilon}u(x,t)\mathrm{d}x=\infty,\quad \forall\,\varepsilon>0, \tag{8}$$

就称之为强奇性解。

由自相似解式的定义可知，(7) 等价于

$$\lim_{t\to 0}r^{\frac{\alpha}{\beta}}f(r)=0. \tag{9}$$

而条件 (8) 则等价于

$$\lim_{t\to 0}r^{n\beta-\alpha}\int_{r\le\varepsilon t^{-\beta}}f(r)\mathrm{d}r=0,\quad \forall\,\varepsilon>0. \tag{10}$$

如果 $n\beta<\alpha$，且方程 (5) 的解 f 满足 (9) 式，则 $f\in L^1(0,\infty;r^{n-1}\mathrm{d}r)$，从而 f 满足 (10) 式，因此由 (2) 所定义的函数 $u(x,t)$ 同时满足 (7), (8) 式，即为方程 (1) 的一个强奇性解。

本文将讨论方程 (1) 的自相似强奇性解的存在的充要条件。

2 自相似及其分类

本节研究方程 (5)，根据解和初值 $f(0)$ 关系对解给出一个完整的分类，并以此来研究 (1) 式的自相似奇性解，得出自相似奇性解的存在性。令 $z=f^m$，则 (5)-(6) 式化为

$$\left(|z'|^{p-2}z'\right)'+\frac{n-1}{r}|z'|^{p-2}z'+\beta r\left(z^{\frac{1}{m}}\right)'+\alpha z^{\frac{1}{m}}-z^{\frac{q_1}{m}}|z'|^{p_1}=0, \tag{11}$$

$$z(0)=b=a^m>0,\quad z'(0)=0. \tag{12}$$

将 (11)-(12) 写成一个等价的积分方程，再利用标准的 Picard 迭代或不动点定理可以证明对任意的 $b>0$，(11)-(12) 有唯一的解 $f(r)=f(r,b)$。设 $(0,R(b))$ 为 $z>0$ 的最大区间，则在 $(0,R(b))$ 内，$z'(r)<0$，且

(i) $R(b)=\infty$； (ii) $R(b)<\infty,\ z(R(b))=0$。
从而对任意 $a>0$，(5)-(6) 有唯一解 $f(r)=f(r,a),\ R(a)=R(b)$，这里 $(0,R(a))$ 为 $f>0$ 的最大区间。

本文的主要结果是

定理 2.1 设 $p>2,\ m>1$，同时假定 (2) 成立，则有

(I) 若 $\alpha\le n\beta$，则 $R(b)=\infty$，且

$$\lim_{r\to\infty}\inf r^{\frac{\alpha}{\beta}}f(r;b)>0.$$

(II) 若 $\alpha>n\beta$，则存在互不相交的两个开集 A,B 和一个闭集 C，满足

$$A\cup A\cup B\cup C=(0,\infty),$$

且若 $0<b\ll 1$, $(0,b)\subset A$；若 $b\gg 1$, $(b,\infty)\subset B$，使得

(i) 如果 $b\in A$，则 $R(b)<\infty,\ (f^m)'(R(b))<0$;

(ii) 如果 $b\in B$，则 $R(b)=\infty,\ \lim\limits_{r\to\infty}(f(r;b),f'(r,b))=(0,0)$ 且存在常数 $k(b)>0$ 使得

$$\lim_{r\to\infty}r^{\frac{\alpha}{\beta}}f(r;b)=k(b);$$

(iii) 如果 $b\in C$，则 $R(b)<\infty,\ (f^m)'(R(b))=0$，且

$$\lim_{r\to R(b)}\big(f^{m-1}(r,b)\big)'=-\frac{m-1}{m}\beta R(b).$$

下面我们对定理中的集合 A,B,C 的具体含义作出说明。令 $v=|z'|^{p-2}z'=-|z'|^{p-1}$，则 (11) 式可改写为

$$v'=-\frac{n-1}{r}v+\frac{\beta}{m}rz^{\frac{1}{m}-1}|v|^{\frac{1}{p-1}}-\alpha z^{\frac{1}{m}}+z^{\frac{q_1}{m}}|v|^{\frac{p_1}{p-1}}. \tag{13}$$

对任意 $\lambda,\eta>0$，令

$$S_{\lambda,\eta}=\Big\{(z,v)\mid 0<z\le\eta,\ -\lambda z^{\theta}<-|v|^{\frac{1}{p-1}}<0\Big\},$$

$$S_{\lambda}=\Big\{(z,v)\mid 0<z,\ -\lambda z^{\theta}<-|v|^{\frac{1}{p-1}}<0\Big\},$$

其中常数 θ 满足

$$\frac{1}{m}<\theta<\frac{m+1}{2m}. \tag{14}$$

可以证明存在仅与 α,β 有关的常数 $r_{\lambda,\eta}$ 使得下面引理成立。

引理 2.1 对任意 $\lambda,\eta>0$，存在常数 $r_{\lambda,\eta}$，使得当 $r>r_{\lambda,\eta}$ 时，$S_{\lambda,\eta}$ 是正不变集，即若 $(z(r_{\lambda,\eta}),v(r_{\lambda,\eta}))\in S_{\lambda,\eta}$，则当 $r>r_{\lambda,\eta}$ 时，方程 (13) 的轨线 $(z(r),v(r))$ 在 $S_{\lambda,\eta}$ 内。

由引理 2.1 可以证明当 $R(a)=\infty$ 时，方程 (13) 的轨线最终进入 S_1 内。

定义如下的 3 个集合:

$$A=\big\{a>0\mid R(a)<\infty,\ z'(R(a))<0\big\},$$

$$B=\big\{a>0\mid (13)\text{ 式的轨线 }(z,v)\text{ 从 }(a,0)\text{ 开始最终进入 }S_1\text{ 内}\big\},$$

$$C=\big\{a>0\mid R(a)<\infty,\ z'(R(a))=0\big\}.$$

由于对任意 $a\in B$ 以及当 r 小于且接近于 $R(a)$ 时，相应方程 (13) 的轨线 $(z(r),v(r))$ 均满足 $z'+z^{\theta}>0$。因此 $R(a)=\infty$。于是 A,B,C 互不相交且满足 $A\cup B\cup C=(0,\infty)$。

3 定理的证明

引理 3.1 A 是非空开集，且若 $0 < a \ll 1$，则 $(0, a) \subset A$。

该引理的证明可参见文献 [8] 等。同时，类似地可以证明如下的引理 3.2 至引理 3.4，为节省篇幅，略去细节。

引理 3.2 若 $R(a) = \infty$，则存在 $k(a) > 0$，使得

$$\lim_{r \to \infty} r^{\frac{\alpha}{\beta}} z^{\frac{1}{m}} = k(a).$$

引理 3.3 B 是非空开集，并且当 $a \gg 1$ 时，$(a, \infty) \subset B$。另外，对任意的 $a \in B$，有

$$\lim_{r \to \infty} r^{\frac{\alpha}{\beta}} z^{\frac{1}{m}} = k(a) > 0. \tag{15}$$

引理 3.4 C 是非空闭集，并且对任意 $a \in C$，方程 (11) 的解 $z(r)$ 满足

$$\lim_{r \to R(a)} \frac{z'(r)}{z^{\frac{1}{m}}(r)} = -\beta R(a). \tag{16}$$

定理 2.1 的证明 若 $\alpha \leq n\beta$，在方程的两边同乘以 $r^{\frac{\alpha}{\beta}-1}$ 得

$$\left(r^{\frac{\alpha}{\beta}-1}|z'|^{p-2}z' + \beta r^{\frac{\alpha}{\beta}} z^{\frac{1}{m}}\right)' = \left(n - \frac{\alpha}{\beta}\right) r^{\frac{\alpha}{\beta}-2}|z'|^{p-1} + r^{\frac{\alpha}{\beta}-1} z^{\frac{q_1}{m}} |z'|^{p_1} < 0. \tag{17}$$

令

$$g(r) = r^{\frac{\alpha}{\beta}-1}|z'|^{p-2}z' + \beta r^{\frac{\alpha}{\beta}} z^{\frac{1}{m}},$$

则显然

$$\lim_{r \to 0} g(r) = 0,$$

由 (17) 式，对任意的 $r > 0$。

$$g(r) > 0. \tag{18}$$

若 $R(a) < \infty$，由于在区间 $[R(a), \infty)$ 上，$z \equiv 0$，$z' \equiv 0$，那么

$$\lim_{r \to R(a)} g(r) = 0.$$

这与 (18) 矛盾。故 $R(a) = \infty$。

由 $g(r) < \beta r^{\frac{\alpha}{\beta}} z^{\frac{1}{m}}$，及 $g(r)$ 的单调性得

$$\lim_{r \to \infty} \inf r^{\frac{\alpha}{\beta}} z^{\frac{1}{m}} > 0.$$

同时，根据引理 2.1 和引里 3.1 至引理 3.4 可以得到定理 2.1 中的 (i), (ii) 和 (iii) 的结论。　　**证毕**

参考文献：

[1] Lions P L. Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations[M]. Harlow: Pitman Res Notes Math Ser 69, 1982

[2] Wu Z, Zhao J, *et al*. Nonlinear Diffusion Equations[M]. New York: World Scientific Publishing, 2001

[3] Kardar M, Parisi G, Zhang Y C. Dynamic scaling of growing interface[J]. Physics Review Letter, 1986, 56(9): 889-892

[4] Benachour S, Laufencot P. Very singulars to a nonlinear parabolic equation with absorption I, existence[J]. Proceeding Royal Society of Edinburgh, 2001, 131A: 27-44

[5] Brezis H, Friedman A. Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions[J]. Journal of Mathematics Prues Applications, 1983, 62: 73-97

[6] Brezis H, Peletier L A, Terman D. A very singular solution of heat equation with absorption[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1986, 96: 185-209

[7] Kamin S, Peletier L A. Singular solution of the heat equation with absorption[J]. Proceedings of American Mathematics Society, 1985, 95: 205-210

[8] 石佩虎，王明新. 带非线性梯度的拟线性抛物型方程的自相似解[J]. 中国科学A辑，2004, 34: 392-406
Shi P H, Wang M X. The self-similar solutions of quasilinear parabolic equations with nonlinear gradient term[J]. Science in China, Ser A, 2004, 34: 392-406

The Self-similar Solutions for a Quasilinear Doubly Degenerate Parabolic Equation

ZHAN Hua-shui

(School of Sciences, Jimei University, Xiamen 361021)

Abstract: This paper considers a quasilinear doubly degenerate parabolic equation with a nonlinear gradient term, we study the existence of its self-similar singular solutions and consider the corresponding classification. The equation includes the well-known Hamililton-Jacobi equation, the Newtonian filtration equation and the non- Newtonian filtration equation as its special forms. By the standard Picard iteration method, a sufficient condition about the existence of singular self-similar solutions for the equation is obtained, and a classification for these singular self-similar solutions is given.

Keywords: quasilinear doubly degenerate parabolic equation; nonlinear gradient term; self-similar solution; singular solution

Received: 23 Mar 2009. **Accepted:** 15 July 2009.

Foundation item: The Natural Science Foundation of Fujian Province (2009J01009); the Science Fund of Jimei University.